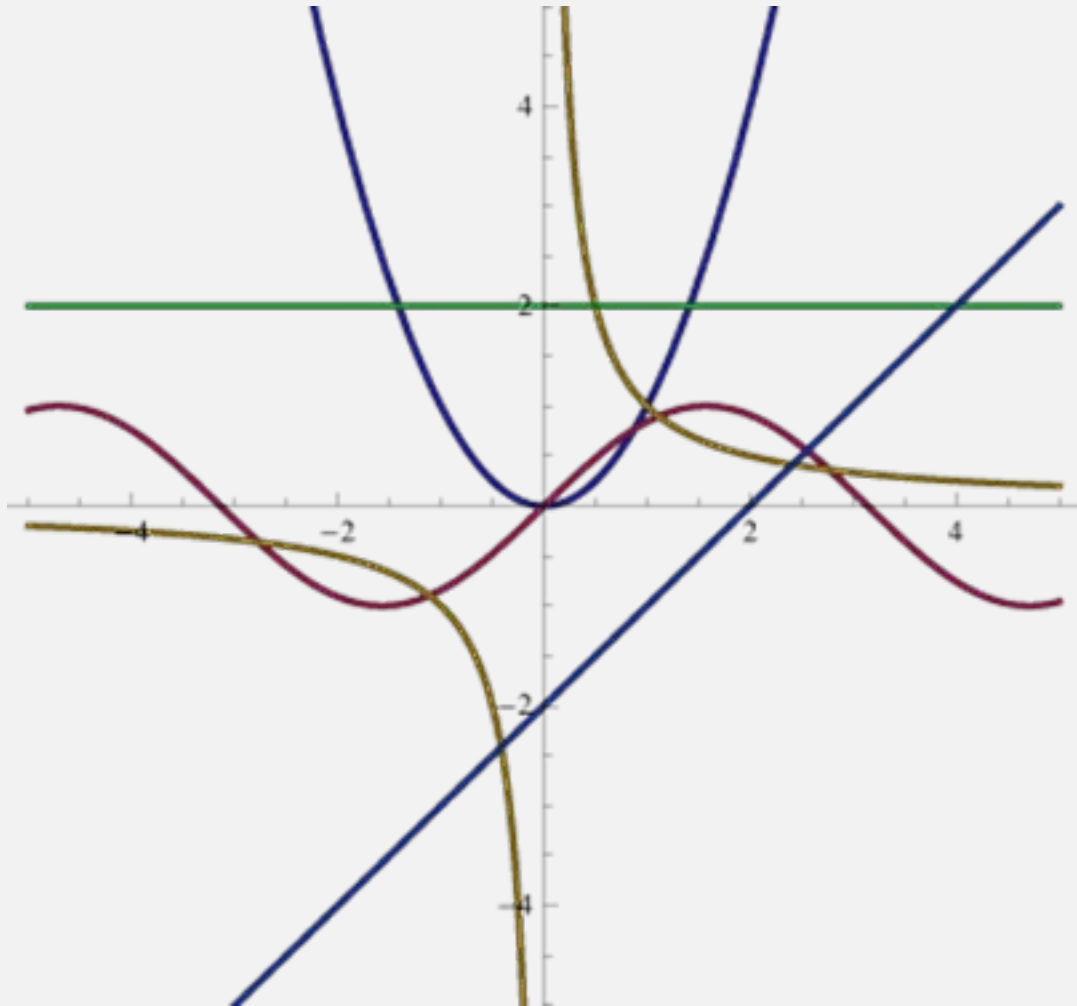


# Використання властивостей функцій при розв'язуванні рівнянь, нерівностей, систем



Захаров Владислав  
м. Фастів

**Мета наукової роботи.** Мета дослідження полягає в тому, щоб за допомогою доступних джерел і наукової літератури дослідити застосування базових теорем для обґрунтування способів розв'язування рівнянь, нерівностей і систем з використанням монотонності та екстремальних властивостей функцій. Дослідити і вивчити зв'язок функцій з явищами навколишнього світу і практичною діяльністю людини.

**Актуальність теми.** У роботі розглянуто питання можливостей використання нестандартних підходів і графічної програми **GeoGebra** для побудови графіків функцій, які ілюструють приклади розв'язування задач різного рівня складності. Зазначено, що використання запропонованих підходів розв'язування наведених задач розширить кругозір і збагатить учнів математичними ідеями, допоможе їм при поглибленому вивченні математики та підготовці до олімпіад різного рівня і турнірів з математики.

**Об'єкт дослідження** – рівняння, системи, нерівності, а **предметом дослідження** є вивчення методів розв'язування рівнянь, що базуються на властивостях функцій.

**Для досягнення поставленої мети доцільно виконати ряд наступних завдань:**

- ✓ розглянути теоретичні основи застосування властивостей функцій при розв'язуванні рівнянь;
- ✓ підібрати систему завдань, при розв'язуванні яких використовуються певні властивості функцій;
- ✓ показати на практиці ефективність та переваги функціонально-графічного методу.

**Дослідницька робота** проводилась для кращого розуміння математики. У результаті дослідження я розширив свої знання про розв'язування рівнянь функціонально-графічним методом. А також з метою показати деякі приклади нестандартного погляду на застосування математичних понять і функцій в навколишньому житті.

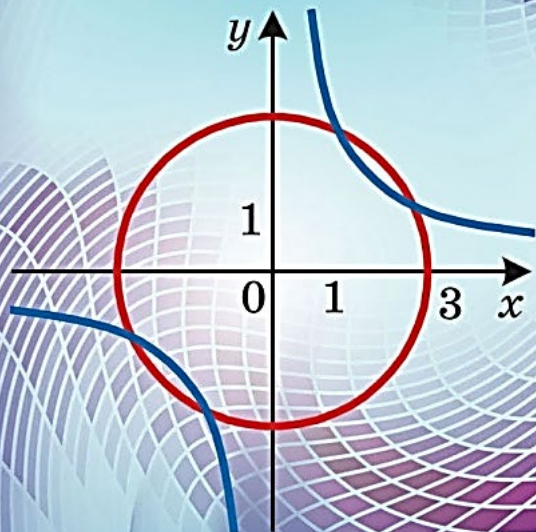
**Новизна дослідження.** Для оптимізації процесу розв'язання рівнянь доцільно використовувати ІКТ. Тому для побудови графіків була використана математична програма **GeoGebra**.

**Практичне значення.** Ця робота сприяє поглибленню знань з математики і розвитку міжпредметних зв'язків.

А. Г. Мерзляк  
В. Б. Полонський  
М. С. Якір

9

# АЛГЕБРА



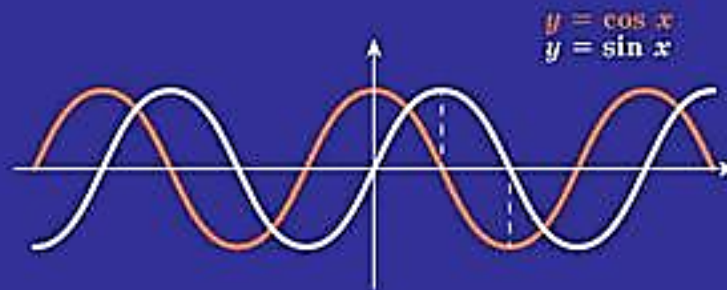
 ГІМНАЗІЯ

А. Г. Мерзляк  
Д. А. Номіровський  
В. Б. Полонський  
М. С. Якір

10

# АЛГЕБРА

І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ  
ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ



 ГІМНАЗІЯ

# Засновник функціонального аналізу - львів'янин Стефан Банах



Будинок, у якому розташувалась  
знаменита Шкотська кав'ярня



1972 рік. Професор Станіслав  
Мазур нагороджує шотландського  
математика Пера Енфло за  
розв'язання задачі № 153  
обіцяним гусаком.

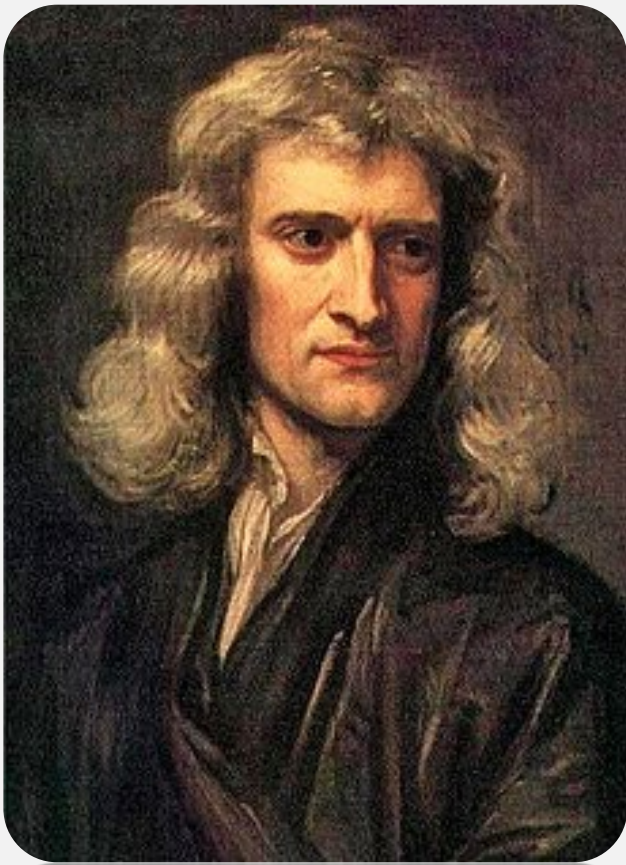
**Відкриття Банаха стали золотим фондом  
математики ХХ ст.**

Handwritten mathematical notes on lined paper, including a limit formula:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ .

17/lipiec 1935  
Problemat Banach  
Kilka. a kiedy przednie  
da na zmedykowski to  
komparujemy my tu,  
vicini quelle ma

**Робота стала неофіційною громадською науковою публікацією. Перший запис був зроблений 17 липня 1935 року, а 31 березня 1941 року, коли зробили останній, у роботі було зафіксовано 193 математичні проблеми.**

## Зануримося в історичний розвиток поняття функції



**Готфрід Вільгельм Лейбніц**  
(1646 - 1716) - німецький філософ, логік, математик, механік, фізик, юрист, історик, дипломат, винахідник і мовознавець. Засновник і перший президент Берлінської академії наук, іноземний член Французької академії наук

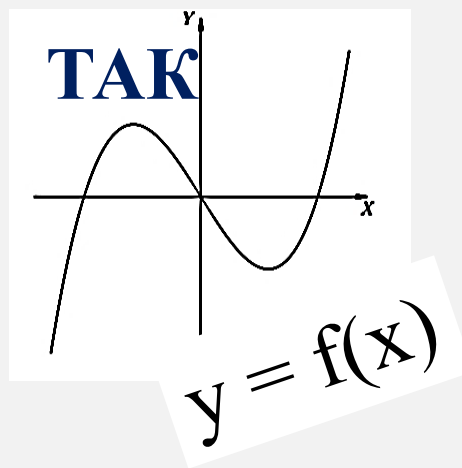


**Йоганн Бернуллі та його учень Ейлер**

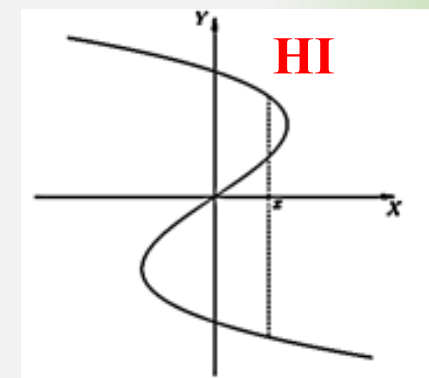


## Визначення з підручника.

Функцією  $y = f(x)$  називається така **відповідність** між множинами  $D$  і  $E$ , при якій кожному значенню змінної  $x$  відповідає одне й тільки одне значення змінної  $y$ .



Алексі Клод Клеро



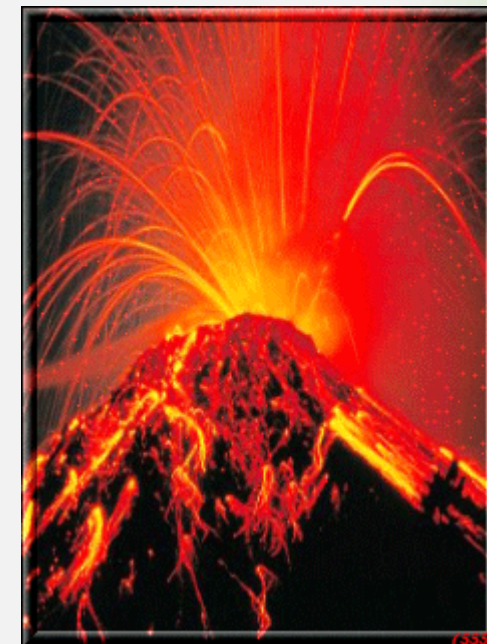
У 1834р. видатний російський математик М. І. Лобачевський (1792 – 1856) сформулював означення функції, в основу якого покладено **ідею відповідності**: “Загальне поняття вимагає, щоб функцією від  $x$  називали число, яке дається для кожного  $x$  і разом з  $x$  поступово змінюється. Значення функції може бути задане або аналітичним виразом, або умовою, яка подає засіб випробовування всіх чисел і вибору одного з них, або, нарешті, залежність може існувати і залишатися невідомою”.



**Функція (лат. functio - виконання роботи).**

### **Географія**

Функція - це явище, яке залежить від іншого явища, є формою його виявлення і змінюється відповідно до його змін.



### **Біологія**

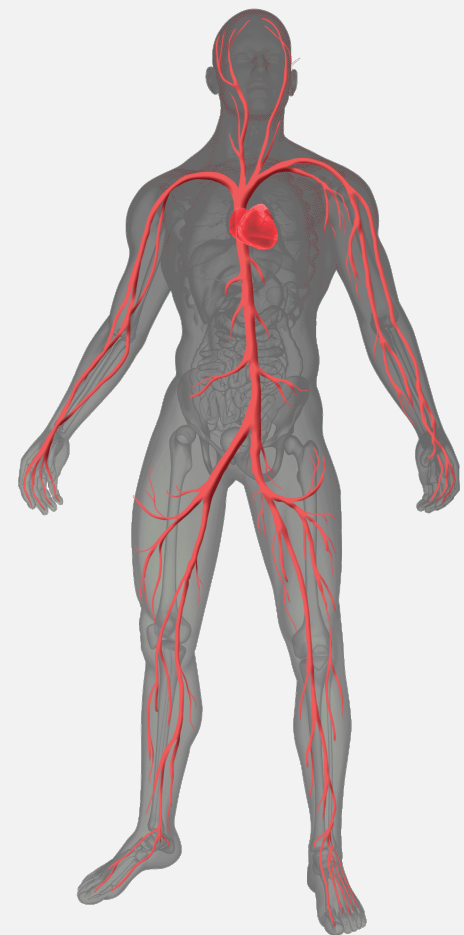
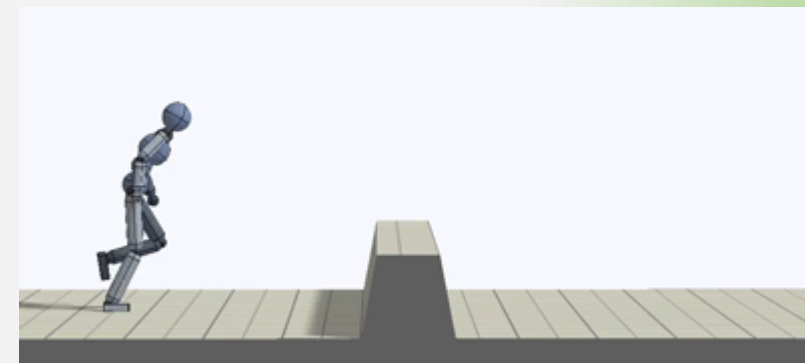
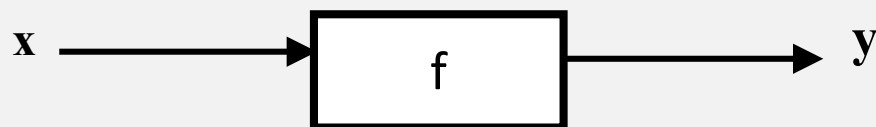
Функція - це специфічна діяльність організму людини, тварин, рослин, їхніх органів, тканин і клітин.

### **Мова**

Функція - призначення, роль чого-небудь.

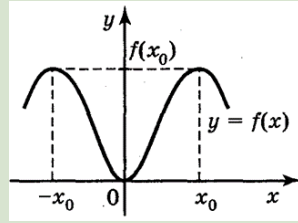
### **Технічна література**

Функція - пристрій, на вхід якого подається  $x$ , а на виході отримаємо  $y$ .

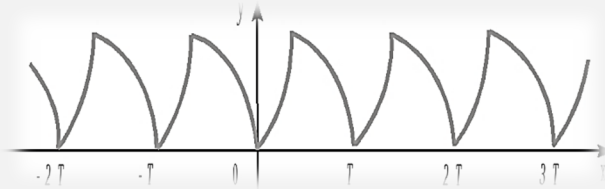


## Основні властивості функцій

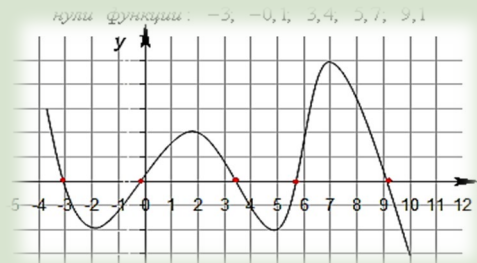
Парність і непарність



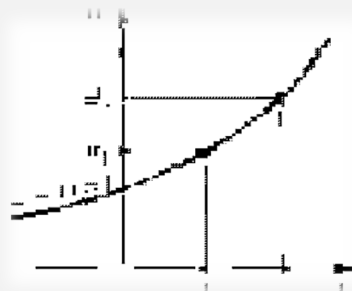
Періодичність



Нулі та проміжки  
знакосталості функції



Монотонність

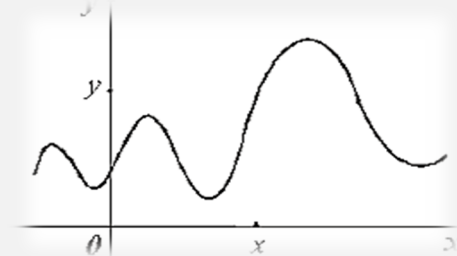


## Способи задання функції

Табличний

x	1	3	...
y	2	6	...

Графічний



Аналітичне завдання (за допомогою формули)

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$$

Вербальний (словесний)

*Кожному раціональному числу поставимо у відповідність число 1, а кожному ірраціональному – число 0.*

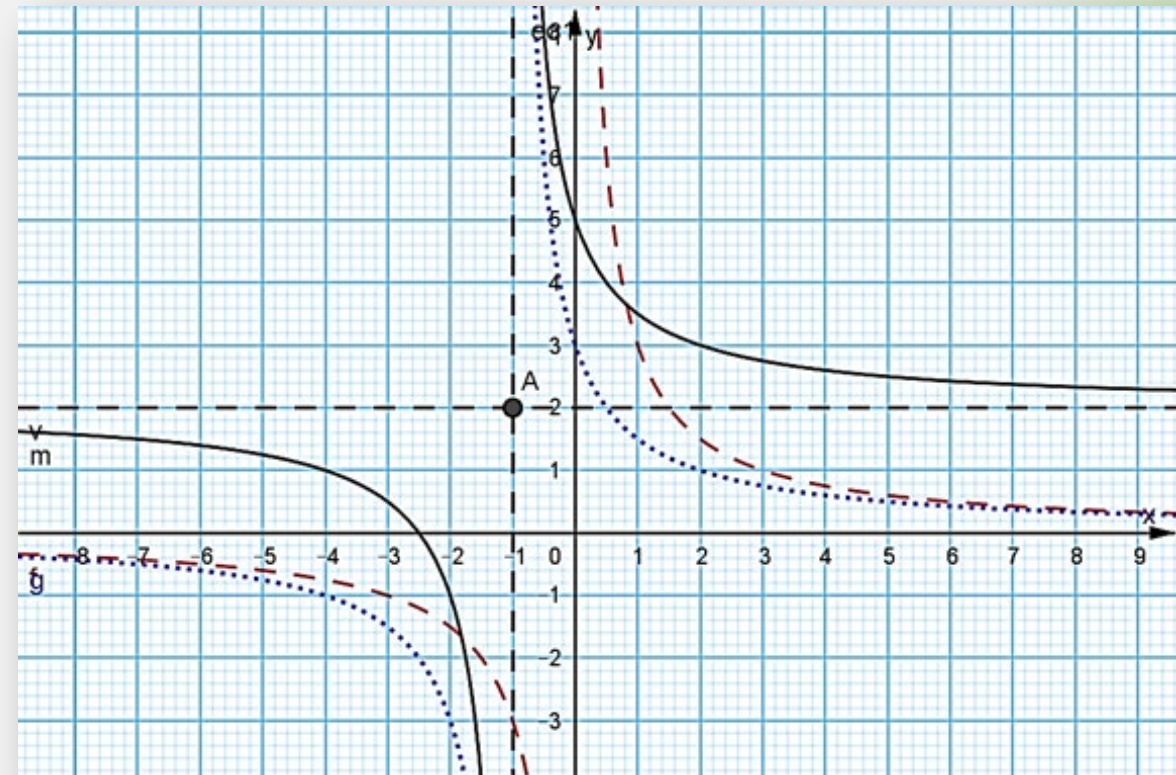
**Графіком функції  $f(x)$**  називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

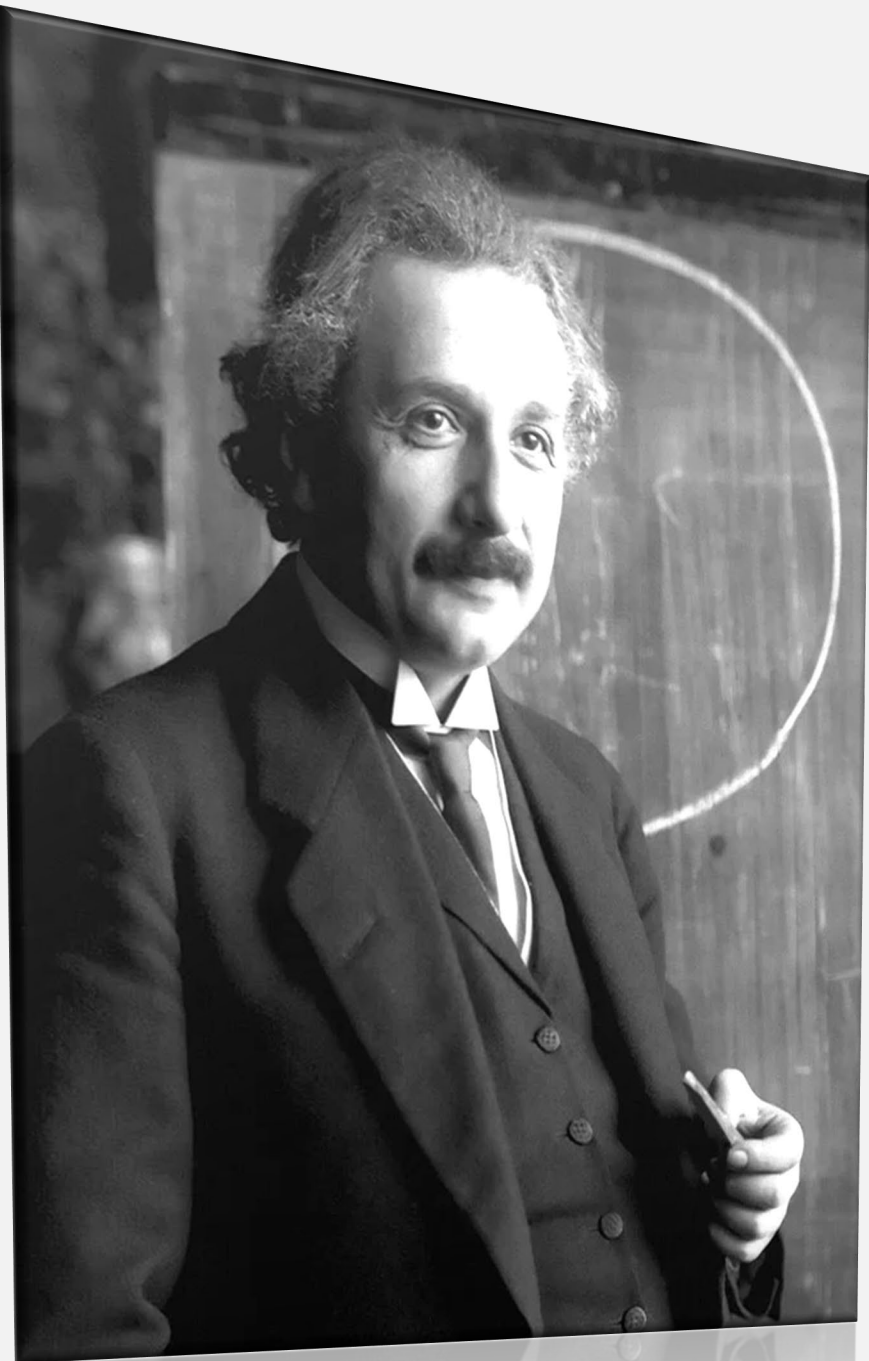
## Геометричні перетворення графіків

- ✓ Перетворення симетрії відносно осі  $x$ .
- ✓ Перетворення симетрії відносно осі  $y$
- ✓ Паралельне перенесення вздовж осі  $x$
- ✓ Паралельне перенесення вздовж осі  $y$
- ✓ Стиск і розтяг вздовж осі  $Ox$
- ✓ Стиск і розтяг вздовж осі  $Oy$
- ✓ Побудова графіка функції  $y=|f(x)|$  та  $y=f(|x|)$
- ✓ Побудова графіка оберненої функції

№ 1. Побудувати графік

дробово - лінійної функції  $y = \frac{2x+7}{x+1}$ .

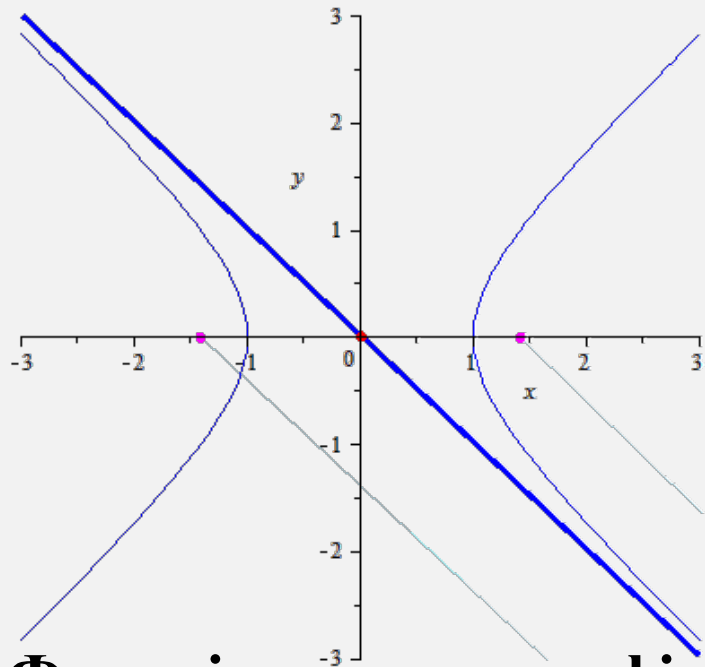




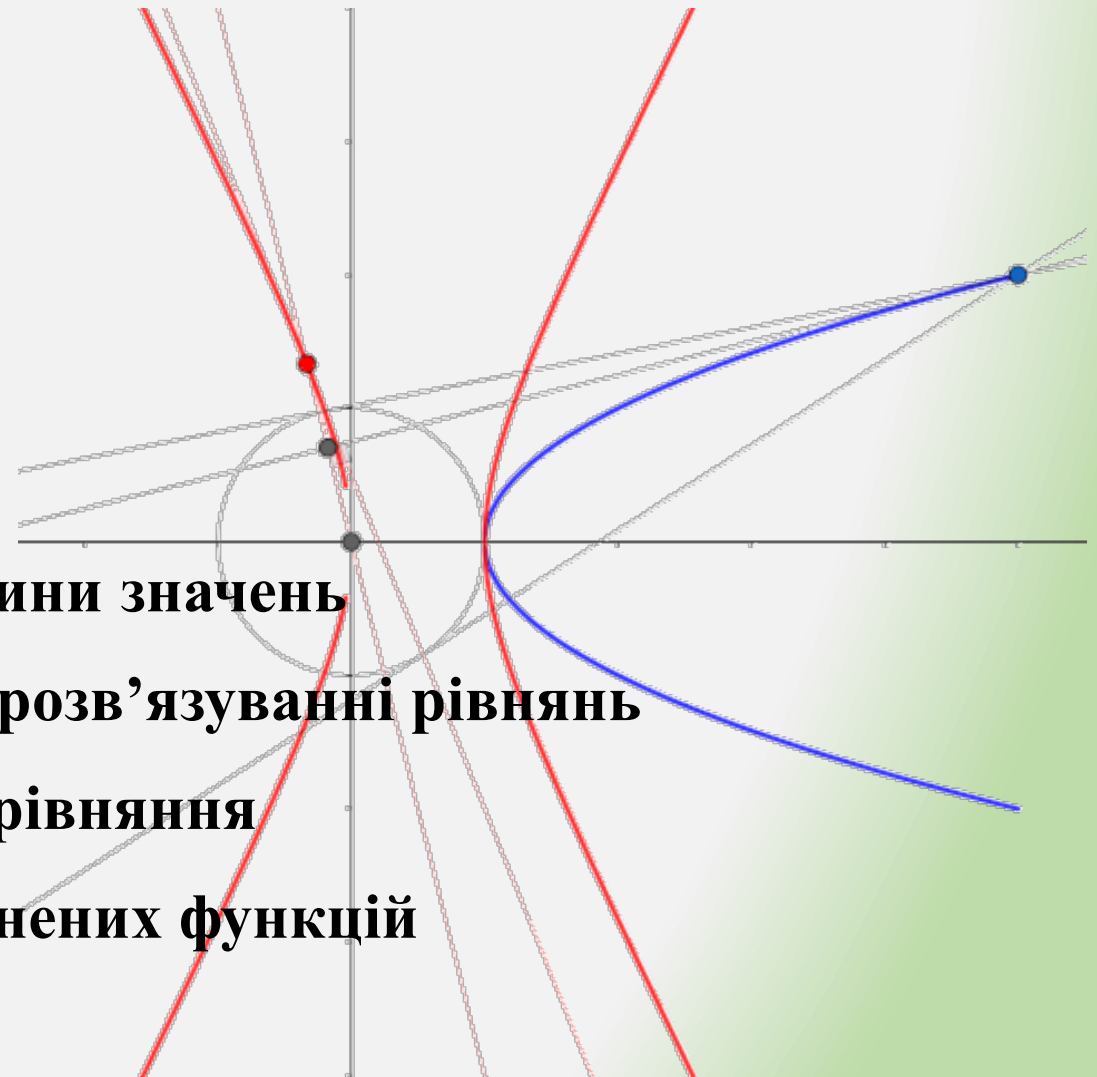
*«Мені доводилось ділити свій час між політикою і рівнянням. Проте рівняння, на мій погляд, набагато важливіші, тому що політика існує тільки для даного часу, а рівняння будуть існувати вічно».*

*А. Ейнштейн*

# Застосування властивостей функції при розв'язуванні рівнянь, нерівностей, систем



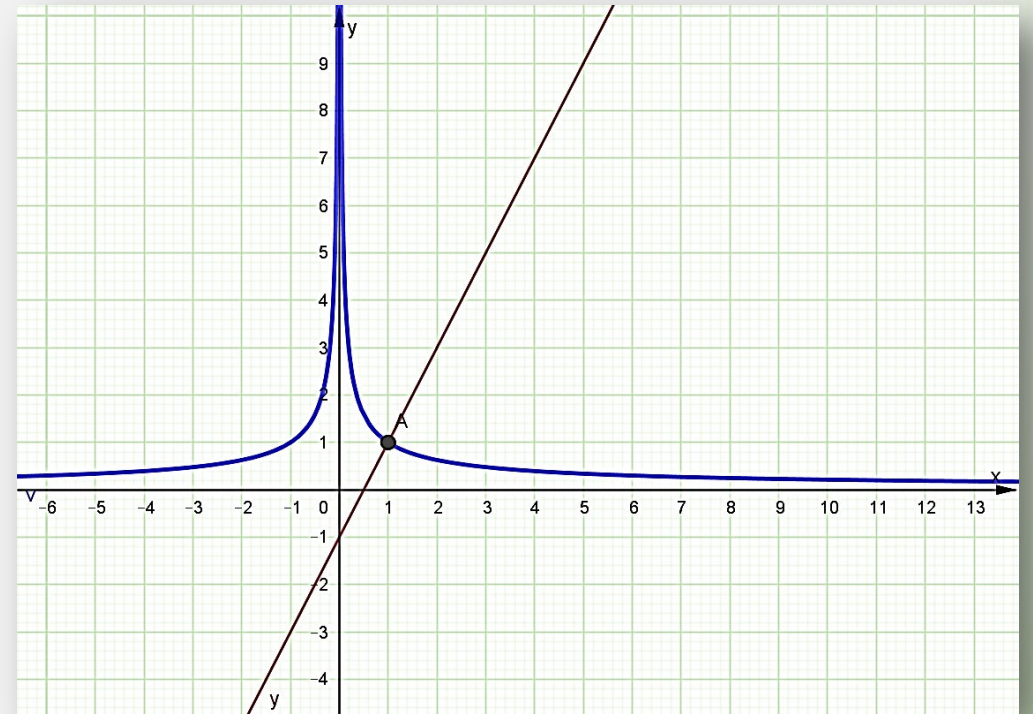
- Функціонально - графічний метод
- Застосування області визначення та множини значень
- Використання монотонності функцій при розв'язуванні рівнянь
- Метод оцінювання лівої та правої частин рівняння
- Використання властивостей взаємно обернених функцій
- Застосування парності функції



## Функціонально - графічний спосіб

№1. Розв'язати рівняння  $x^{\frac{-2}{3}} = 2x - 1$

Відповідь:  $x = 1$ .



## Застосування області визначення та множини значень

№2. Скільки коренів має рівняння  $\sqrt{4-x} \cdot \sqrt{x-6} = 4-x$ ?

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень рівняння  $\begin{cases} 4-x \geq 0, \\ x-6 \geq 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 4, \\ x \geq 6. \end{cases}$

Отримали два інтервали, які не мають точок перетину, тобто рівняння немає розв'язків. Відповідь:  $\emptyset$

## Використання монотонності функцій при розв'язуванні рівнянь

**№1.** (Г. М. Апостолова. Готуємось до ЗНО)

Розв'язати рівняння:  $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{x-1} = 2$

Розв'язання.

Традиційний метод розв'язування рівнянь такого типу – піднести обидві частини рівняння до кубу. Але легко помітити, що  $x = 1$  – корінь. Ліва частина рівняння – зростаюча функція, а права – константа. Отже, рівняння має не більше одного кореня.

Відповідь:  $x = 1$ .

## Застосування парності функції

**№2.** При якому значенні  $a$  рівняння  $2ax^4 - |x| + x^2 = a^2 - 1$  має єдиний корінь?

Розв'язання. Розглядаємо функцію  $f(x) = 2ax^4 - |x| + x^2 - a^2 + 1$ , яка є парною, тому  $x_0 = -x_0 = 0$ . Тоді при  $x = 0$ ,  $a^2 - 1 = 0$ ,  $a = \pm 1$ .

Перевірка: при  $a = 1$ ,  $x = 0$ ; при  $a = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

Відповідь: при  $a = 1$  рівняння має один корінь.

# Графічний спосіб розв'язування завдань з параметрами

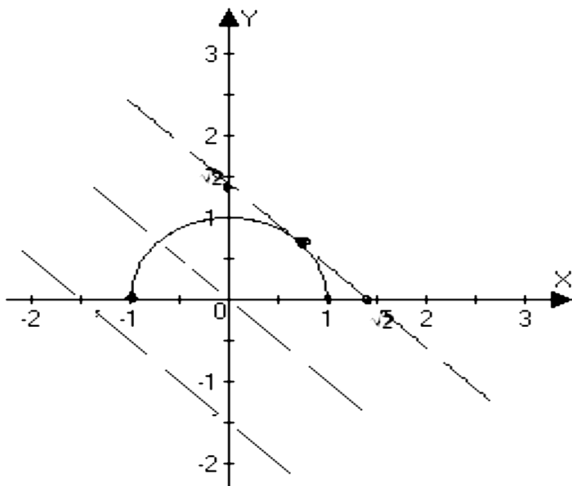
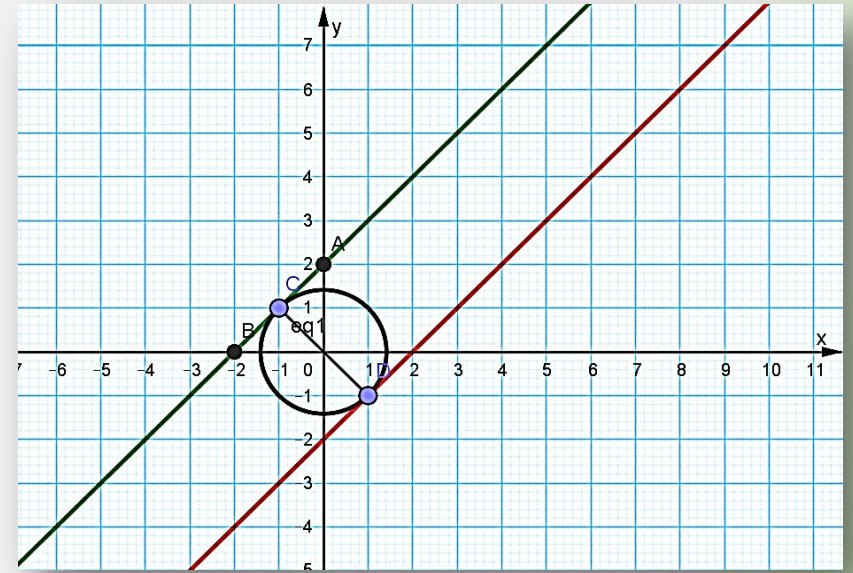
**№1.** Знайти всі значення параметра при кожному з яких система

$$\begin{cases} |y - x| = 2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \text{ має два розв'язки.}$$

Відповідь:  $|a| = \sqrt{2}$ .

**№2.**

При яких значеннях параметра  $a$  нерівність  $\sqrt{1 - x^2} > a - x$  має розв'язки? Відповідь:  $a \in (-\infty; \sqrt{2})$ .



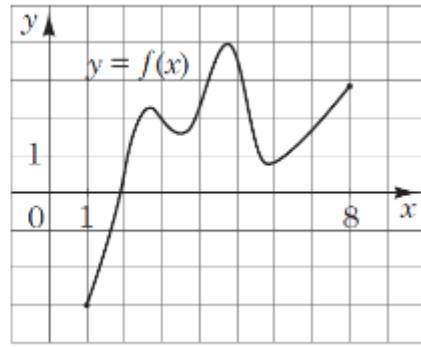
В математиці термін "**параметр**" використовується в двох значеннях:

- 1) Величина, незмінна в цьому завданні, але не є універсальною константою.
- 2) Допоміжна змінна, яка не входить в умову задачі, але зручна для вирішення або для наочності.



# ЗНО – 2019. Графіки в тестах, відповідностях

На рисунку зображено графік функції  $y = f(x)$ , визначеної на проміжку  $[1; 8]$ . Скільки нулів має ця функція на заданому проміжку?

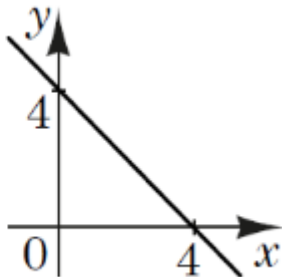


А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	чотири

Графік довільної функції  $y = f(x)$  паралельно перенесли вздовж осі  $x$  на 2 одиниці праворуч. Графік якої з наведених функцій отримали?

А	Б	В	Г	Д
$y = f(x + 2)$	$y = f(x) + 2$	$y = 2f(x)$	$y = f(x) - 2$	$y = f(x - 2)$

Укажіть рівняння прямої, ескіз графіка якої зображено на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
$x = 4$	$y = x + 4$	$y = x - 4$	$y = 4$	$y = 4 - x$

Установіть відповідність між функцією (1–4) та її властивістю (А–Д)

Функція

Властивість

1  $y = x^2$

А спадає на всій області визначення

2  $y = x^3 + 1$

Б зростає на всій області визначення

3  $y = 3 - x$

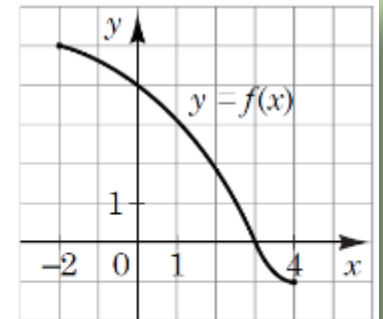
В непарна

4  $y = \sin x$

Г парна

Д областю значень функції є проміжок  $(0; +\infty)$

На рисунку зображено графік функції  $y = f(x)$ , визначеної на проміжку  $[-2; 4]$ . Цей графік перетинає вісь  $y$  в одній із зазначених точок. Укажіть цю точку.

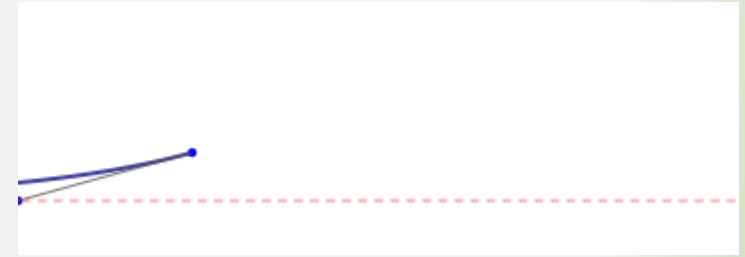


А	Б	В	Г	Д
(4; 0)	(3; 4)	(0; 3)	(3; 0)	(0; 4)

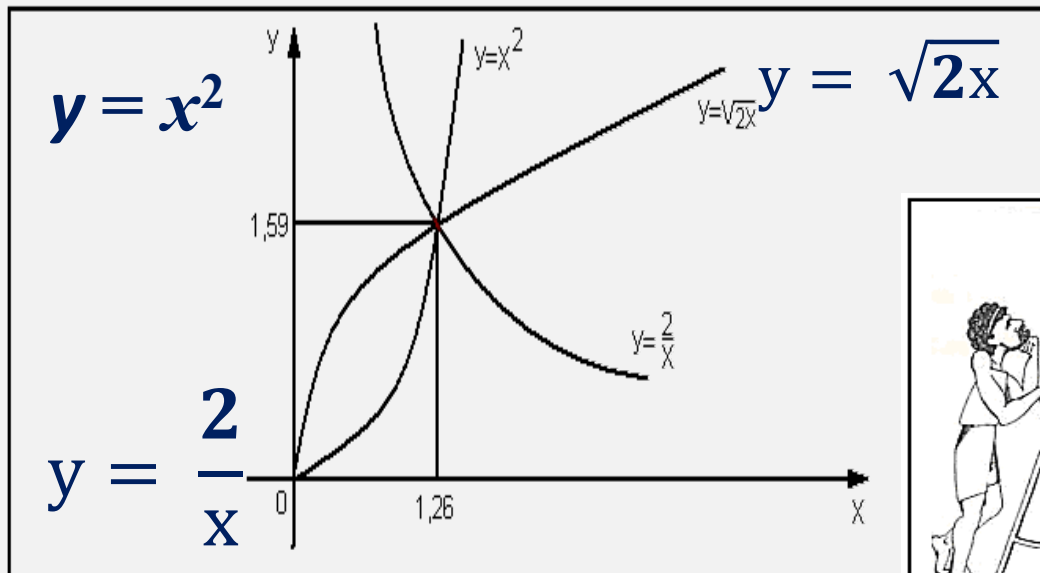
# Задачі минулих століть, пов'язаних з поняттям функції

## Задача Лейбніца (1692 р.)

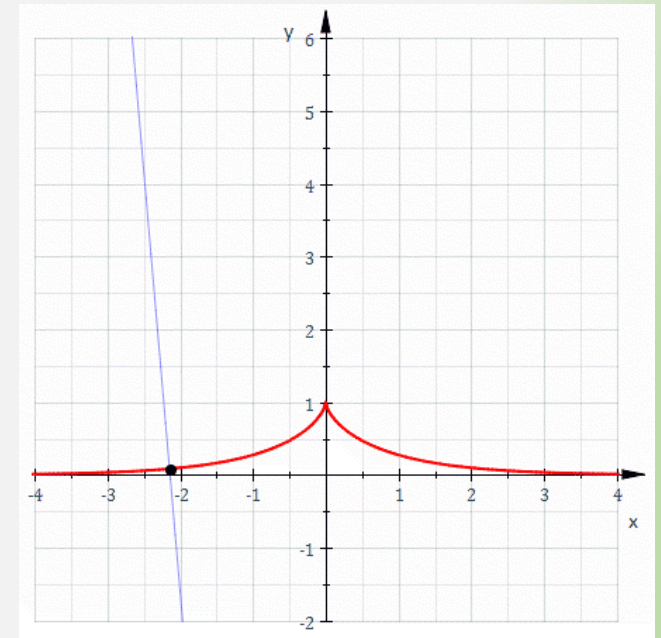
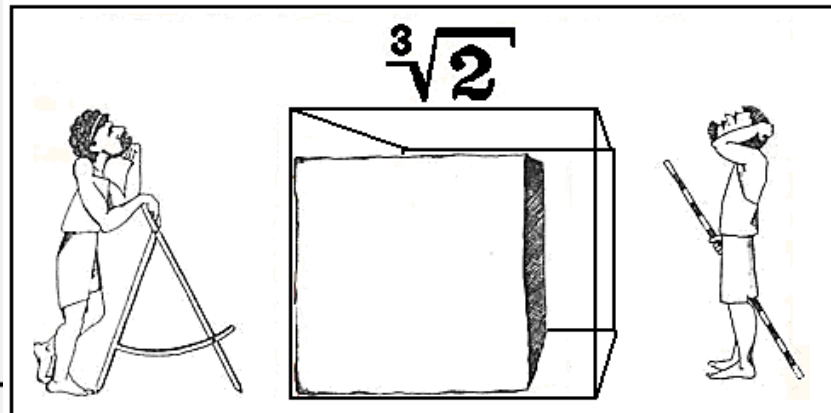
Нехай по осі абсцис біжить собака, а її господар (спочатку знаходився на осі ординат) біжить за нею так, що поводинок весь час натягнутий. Потрібно знайти, по якій лінії біжить господар собаки. Цю криву називають трактриса... Трактриса (лінія потягу або **собача крива**).



## Задача подвоєння ребра куба



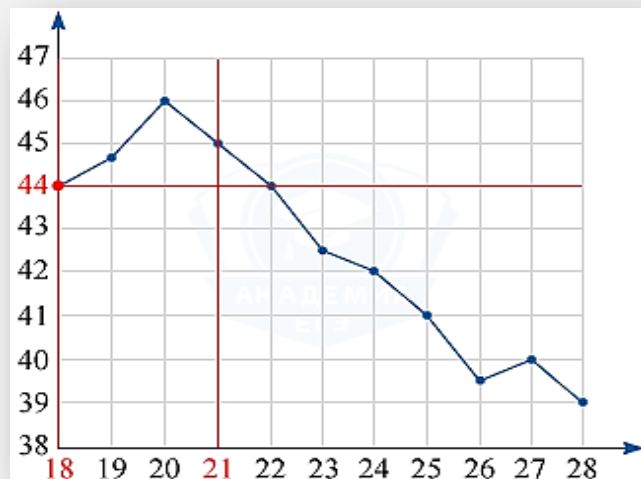
$$\sqrt[3]{2} = 1,26.$$



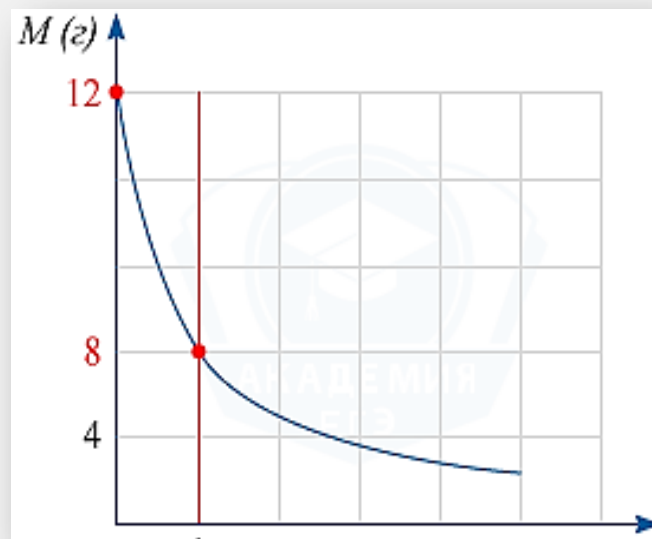
# Розв'язування прикладних задач графічним методом

*Задачу називають прикладною, якщо її умова містить нематематичні поняття. Прикладна задача — це задача, яка виникла поза математикою, але яку можна розв'язати математичними засобами.*

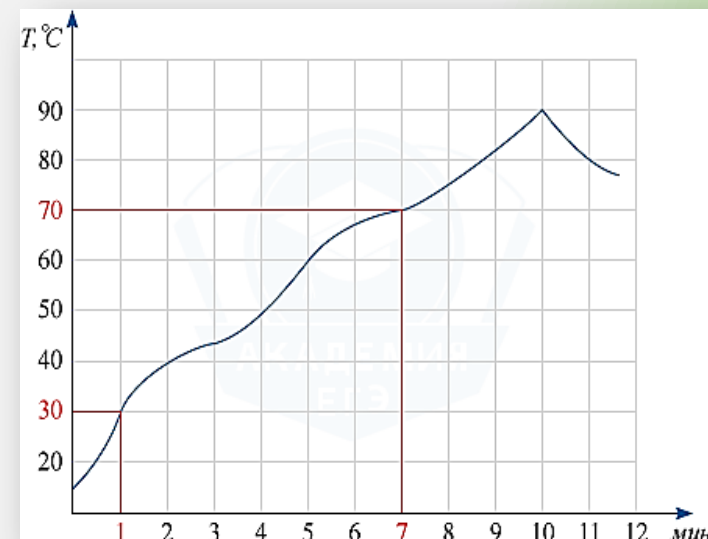
**№1.** На малюнку точками показана ціна нафти на момент закриття біржових торгів в усі робочі дні з 18 по 28 серпня 2019 року... **Визначте по малюнку найменшу ціну нафти...** Відповідь висловіть в доларах США за барель.



**№2.** В ході хімічної реакції кількість вихідної речовини (реагенту), яке ще не вступило в реакцію, згодом поступово зменшується... **Використовуючи графік, визначте скільки грамів реагенту вступило в реакцію за першу хвилину.**



**№3.** На графіку показаний процес розігріву двигуна легкового автомобіля... **Визначте за графіком, скільки хвилин двигун нагрівався від температури  $30^{\circ}\text{C}$  до температури  $70^{\circ}\text{C}$ .**

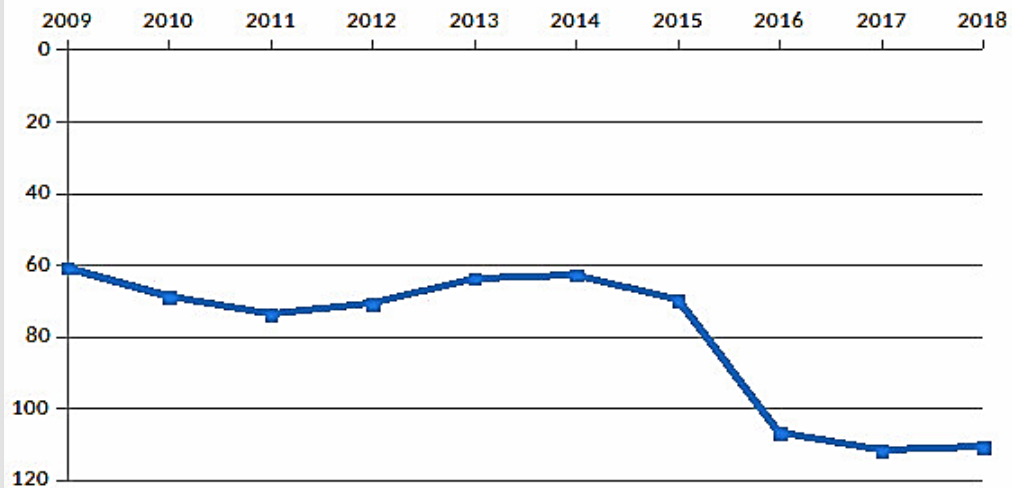


# Дослідження «Ми в оточенні математики»

## *Одне зображення замінює тисячі слів*

- 90% інформації людина сприймає через зір
- 70% сенсорних рецепторів знаходяться в очах
- в 60 000 разів швидше сприймається візуальна інформація в порівнянні з текстовою
- 10% людина запам'ятовує з почутого, 20% – з прочитаного, і 80% – з побаченого і зробленого
- на 323% краще людина виконує інструкцію, якщо вона містить ілюстрації

## Україна в міжнародному рейтингу процвітання



**Індекс процвітання** — є оцінкою світового багатства і благополуччя. В глобальному Індексі процвітання Україна піднялась з 112 на 111 позицію зі 149 країн.

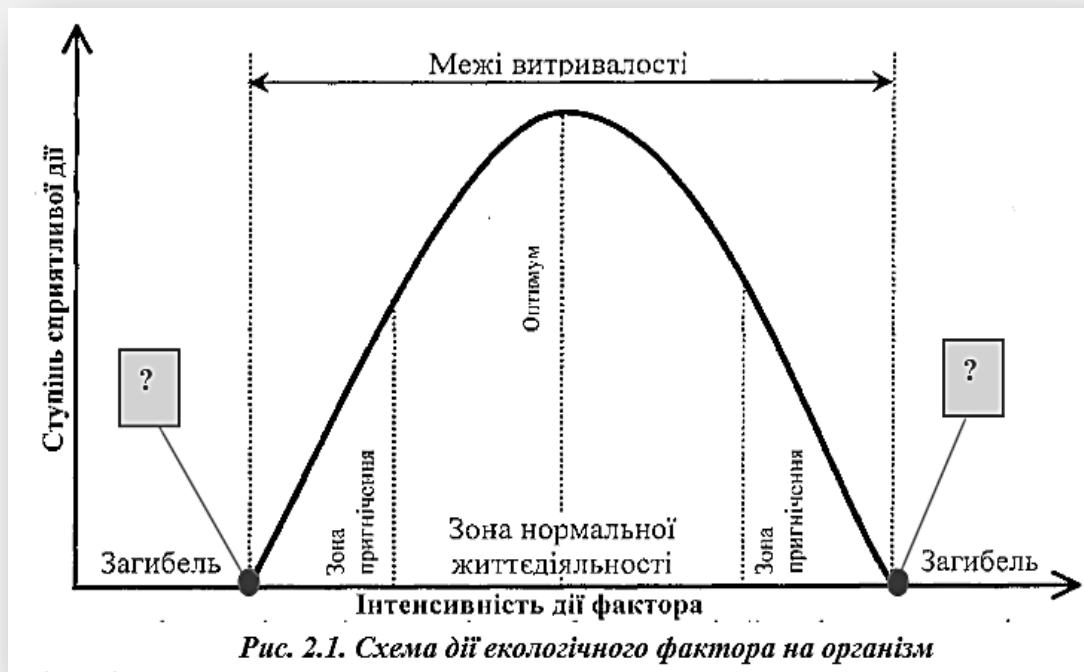


Рис. 2.1. Схема дії екологічного фактора на організм

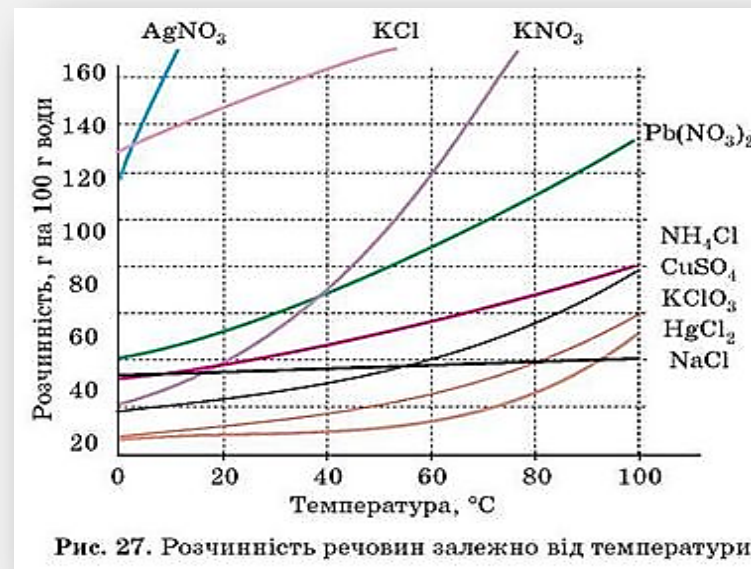
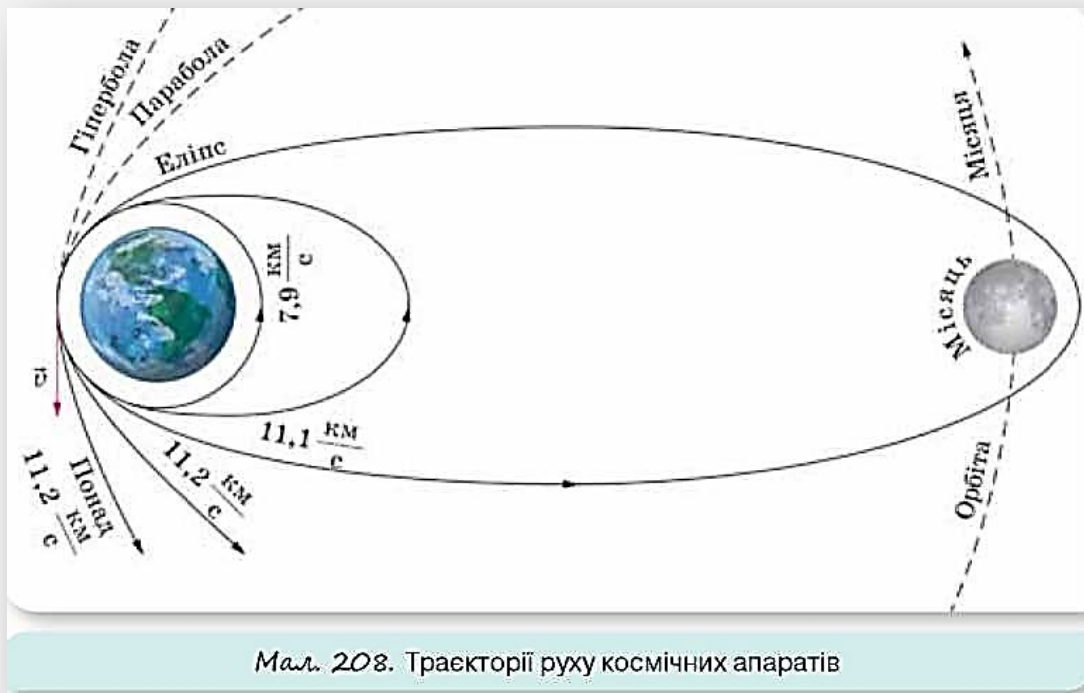


Рис. 27. Розчинність речовин залежно від температури

**Розчинністю** називають здатність речовини розчинитися в тому або іншому розчиннику.

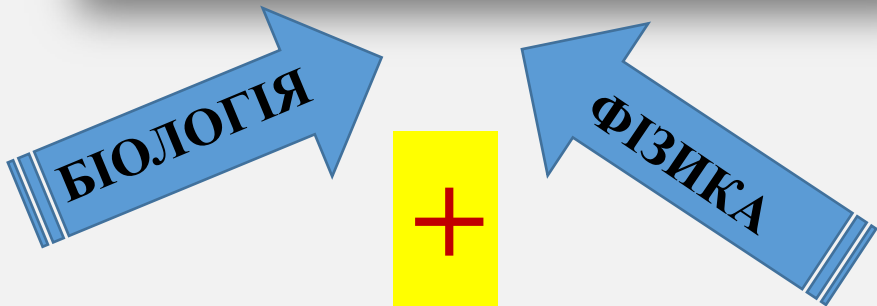
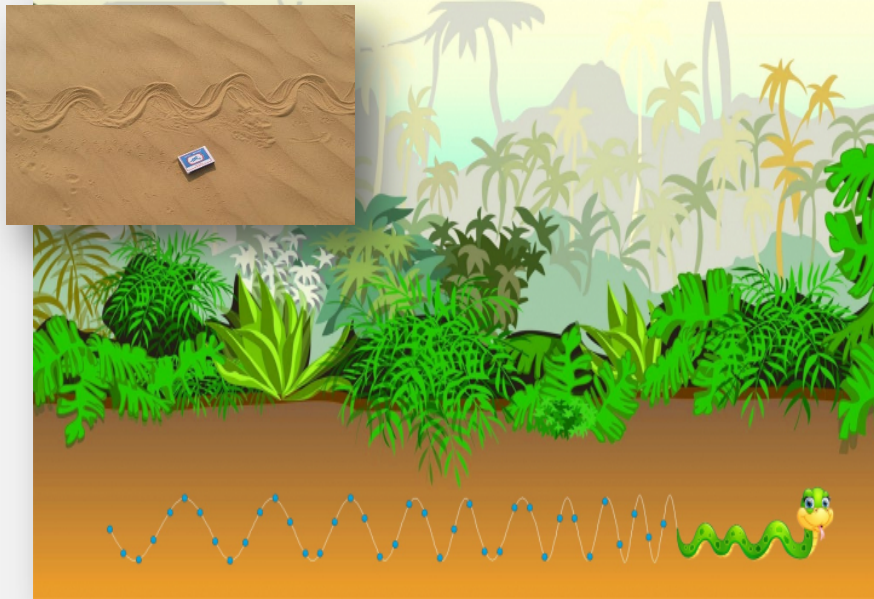


*Штучний супутник Землі* – це тіло, яке рухається на певній висоті над поверхнею Землі по коловій орбіті.

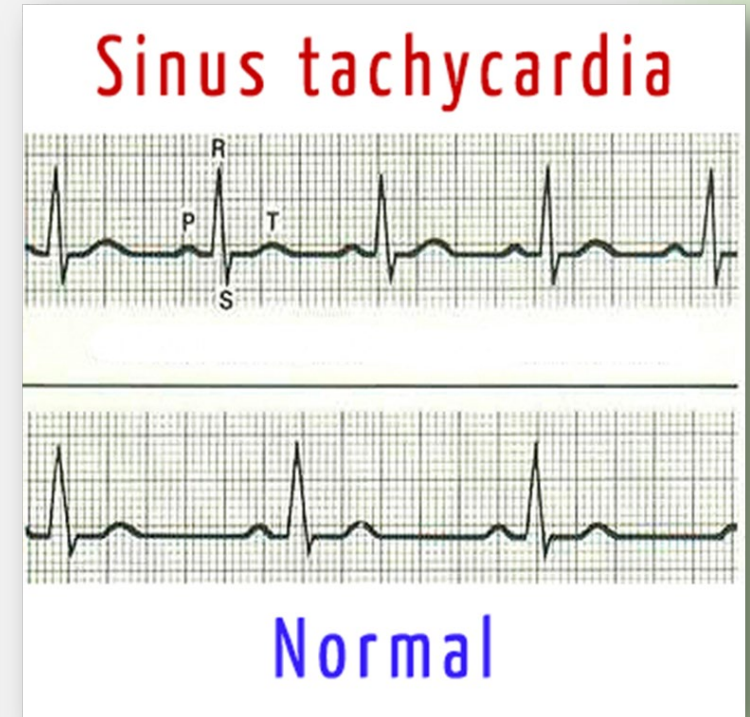
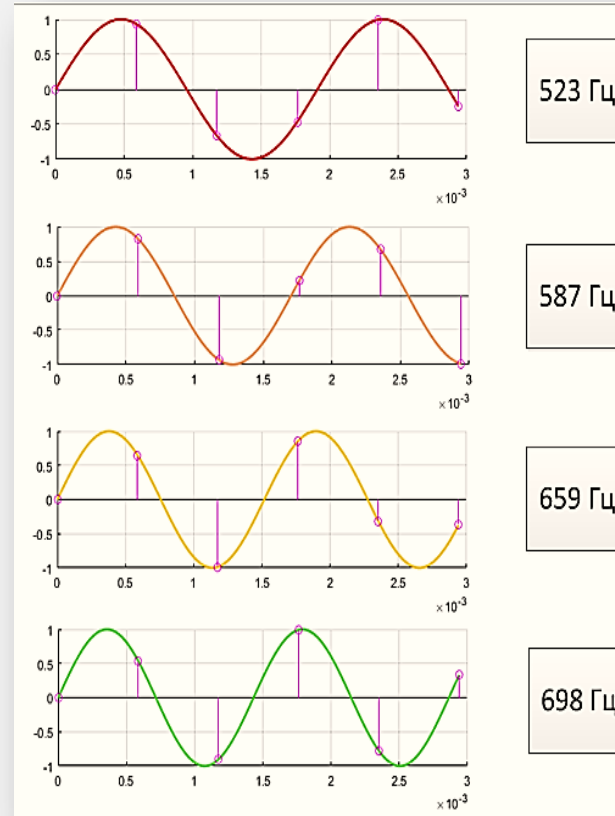


- ✓ Якщо супутник рухається «з першою космічною швидкістю, то він буде обертатися навколо Землі по коловій орбіті» **(коло)**.
- ✓ При досягненні «другої космічної швидкості, траєкторія супутника стане параболічною і супутник ніколи не повернеться в точку, з якої він запусканий» **(парабола)**.
- ✓ При подальшому збільшенні швидкості, супутник буде рухатися по гіперболі і другий фокус з'явиться з іншого боку (центри Землі весь час будуть знаходитися в фокусі орбіти) **(гіпербола)**.

Уявімо собі, що ми працівники Animal Planet і хочемо вивчити траєкторію руху в джунглях якоїсь рідкісної змійки з Червоної книги. Траєкторія руху - коливання з різними частотами.

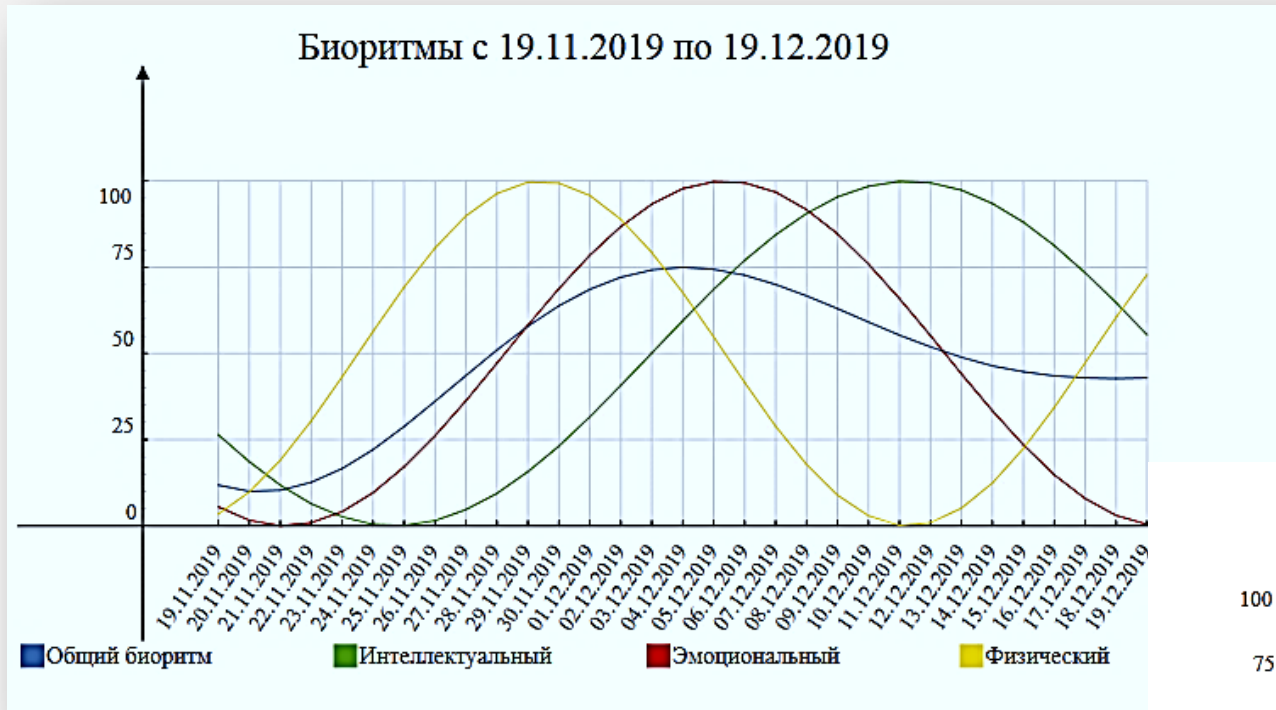


**Електрокардіографія** – це методика реєстрації та дослідження електричних полів, які утворюються під час роботи серця. А електрокардіограма – це графічне представлення результатів даного дослідження.

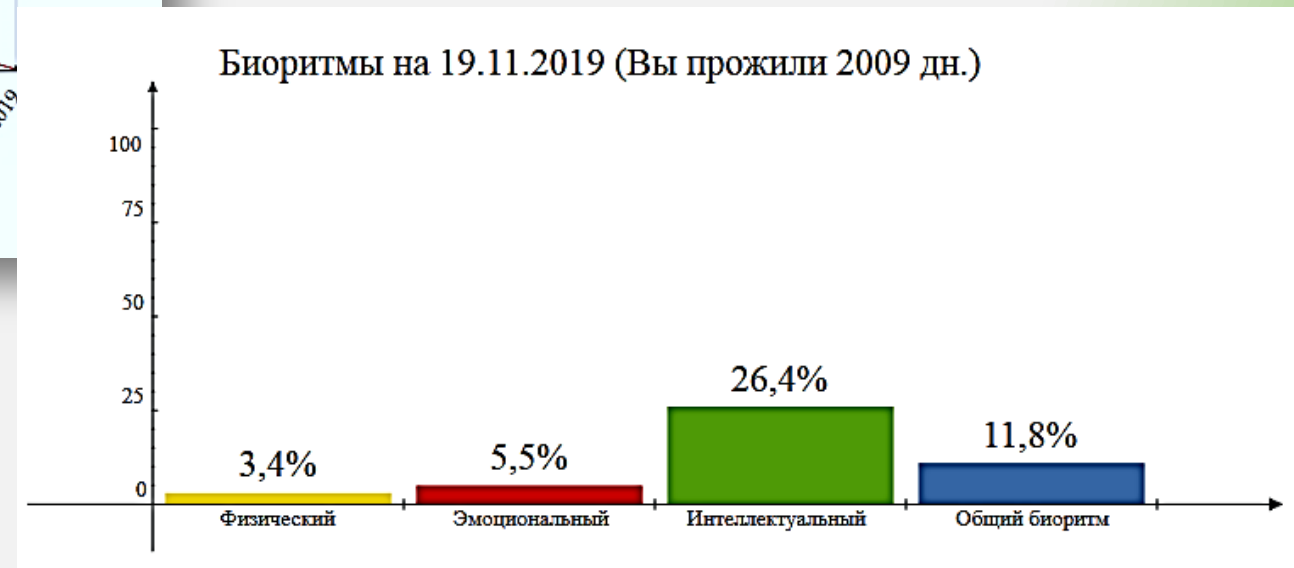


На малюнку представлені 7 сигналів, кожен з яких відповідає своїй музичній ноті - До, Ре, Мі, Фа, Соль, Ля, Сі.

Гарне самопочуття і працездатність людини залежать від синхронізації, тобто здатності нервової системи до дії і взаємодії різних періодичних функцій організму і від збігу в часі ритміки організму з ритмікою навколишнього середовища.



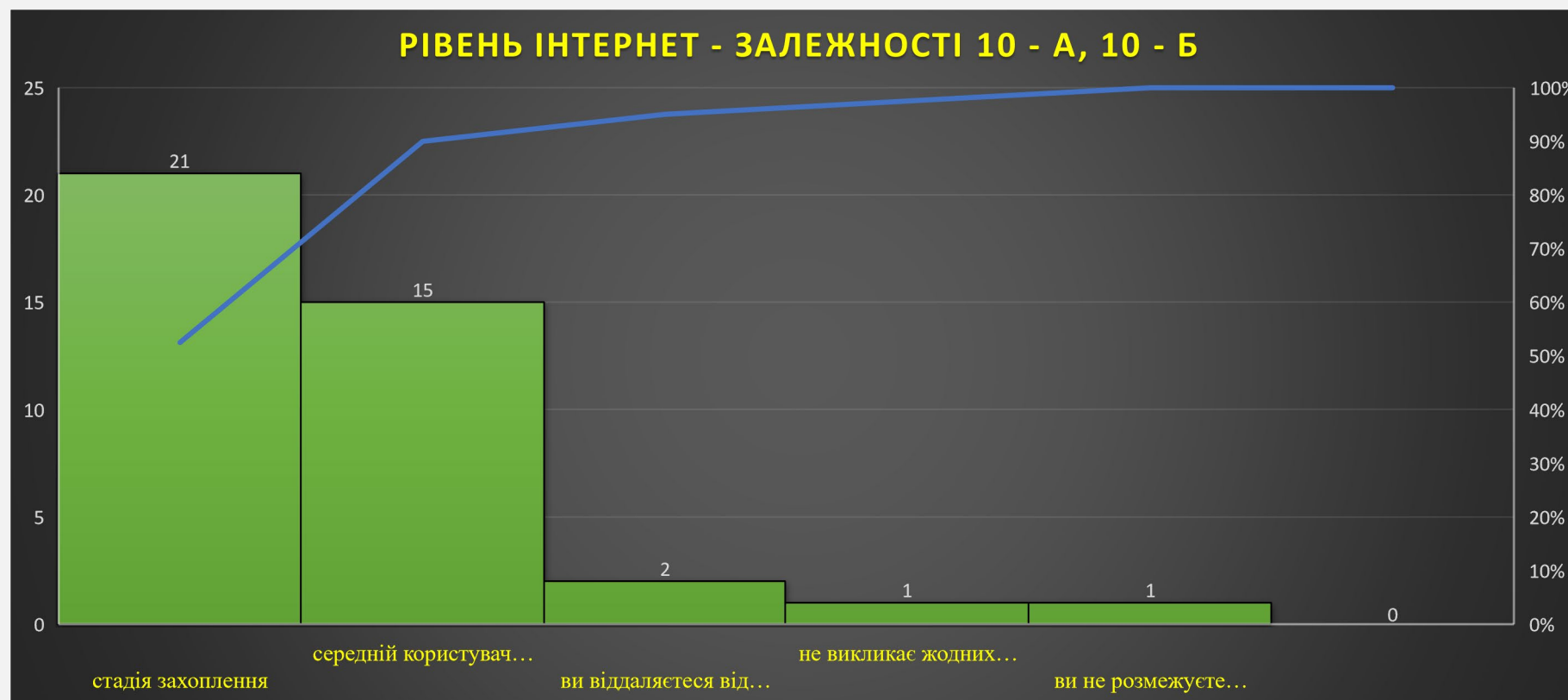
<http://geocult.ru/bioritmyi-online-raschet>





# Інтернет = повітря + вода + їжа + житло

**Інтернет-залежність** – це клінічне порушення, яке характеризується неконтрольованим використанням інтернету. У мозку інтернет-залежних користувачів відбуваються зміни, схожі до тих, що стаються з людьми, які "підсіли" на наркотики чи алкоголь.



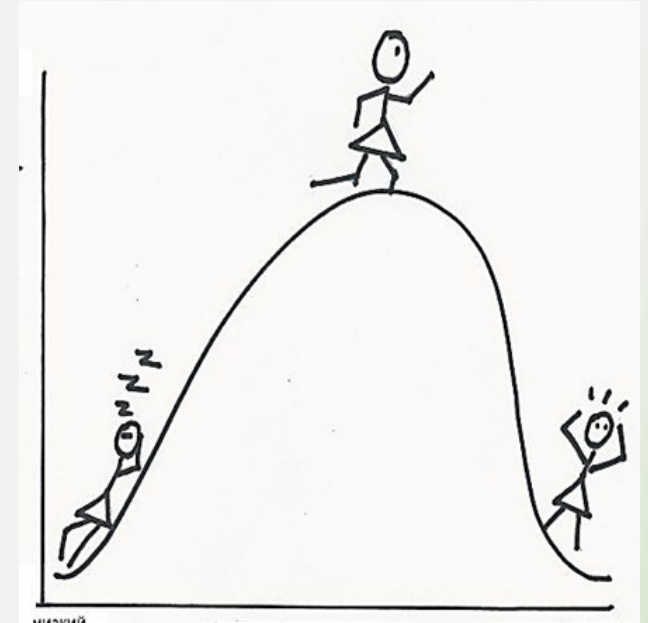
*За даними Організації Об'єднаних Націй, 4,1 мільярда людей у світі підключені до Інтернету. Ще 3,6 мільярда (46,4 %) залишаються без доступу. Найвищий відсоток користувачів мережі в Європі (82,5 %), а найнижчий — в Африці (28,2 %).*

# Математичні основи законів



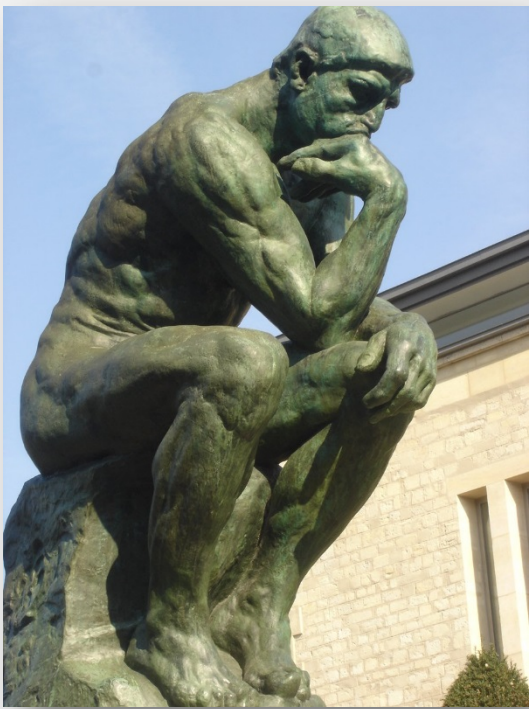
**Синдром студента**

**В психології: закон  
Єркса-Додсона**

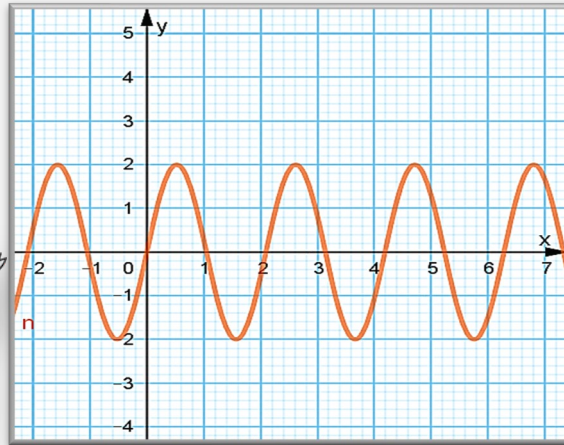


**Закон Мёрфі** — жартівливий універсальний філософський принцип, який полягає в тому, що якщо яка-небудь неприємність може трапитись, — вона таки трапиться.

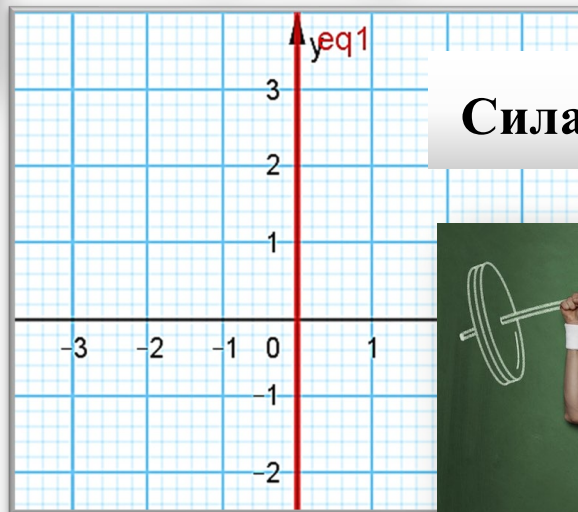
- ✓ **Те, що ви зберігаєте довго, можна викинути (прямо пропорційна залежність).**
- ✓ **Якщо ви щось викинете, воно вам знадобиться.**
- ✓ **Той, хто сміється останнім, розуміє повільніше всіх (функція зростаюча).**
- ✓ **Той, хто живе ближче всіх, завжди спізнюється.**
- ✓ **Якщо здається, що роботу зробити легко, це неодмінно буде важко (обернено – пропорційна залежність).**



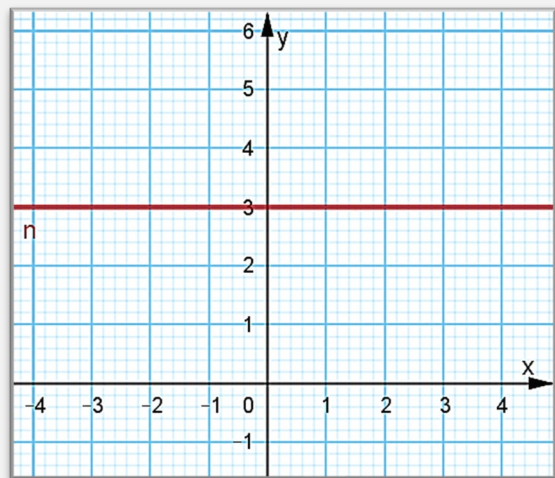
Життя як зебра: чорна смуга, біла смуга, чорна смуга, біла смуга... (періодична функція)



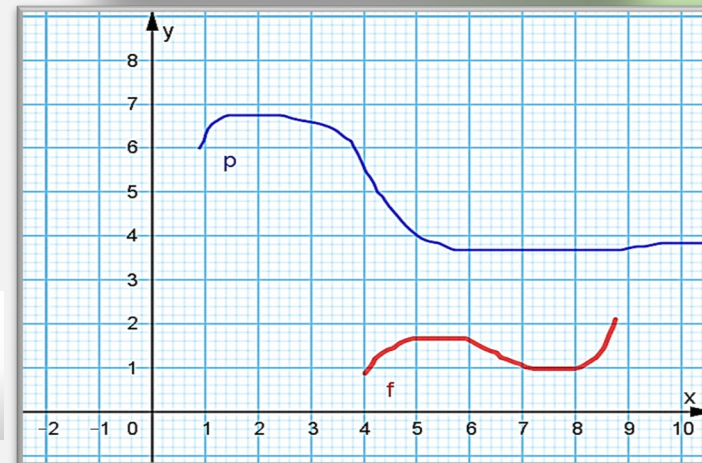
Довго думав, та нічого не придумав



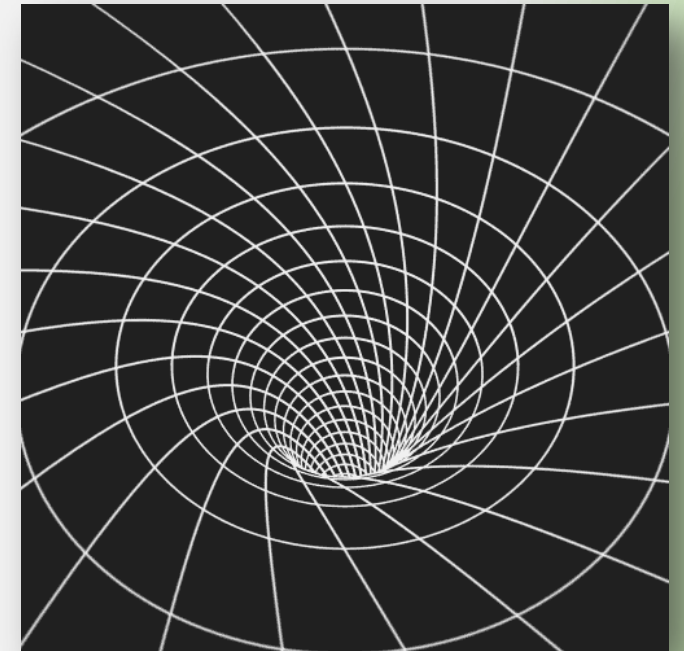
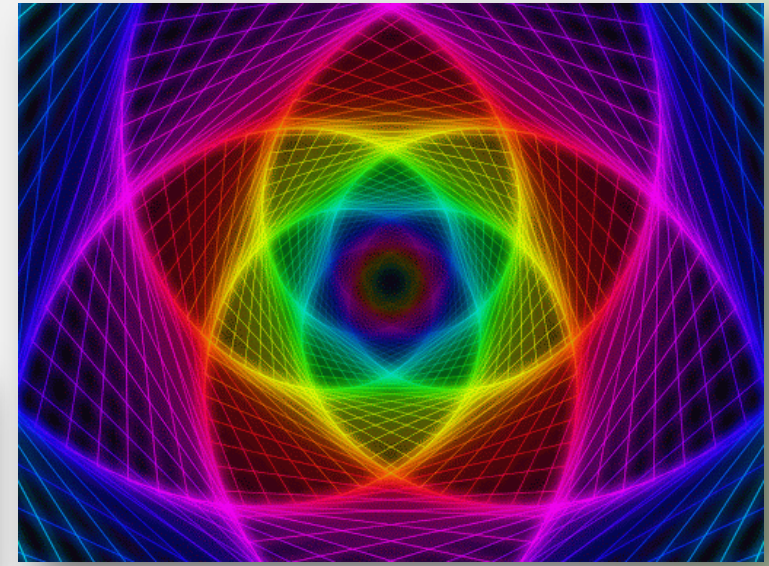
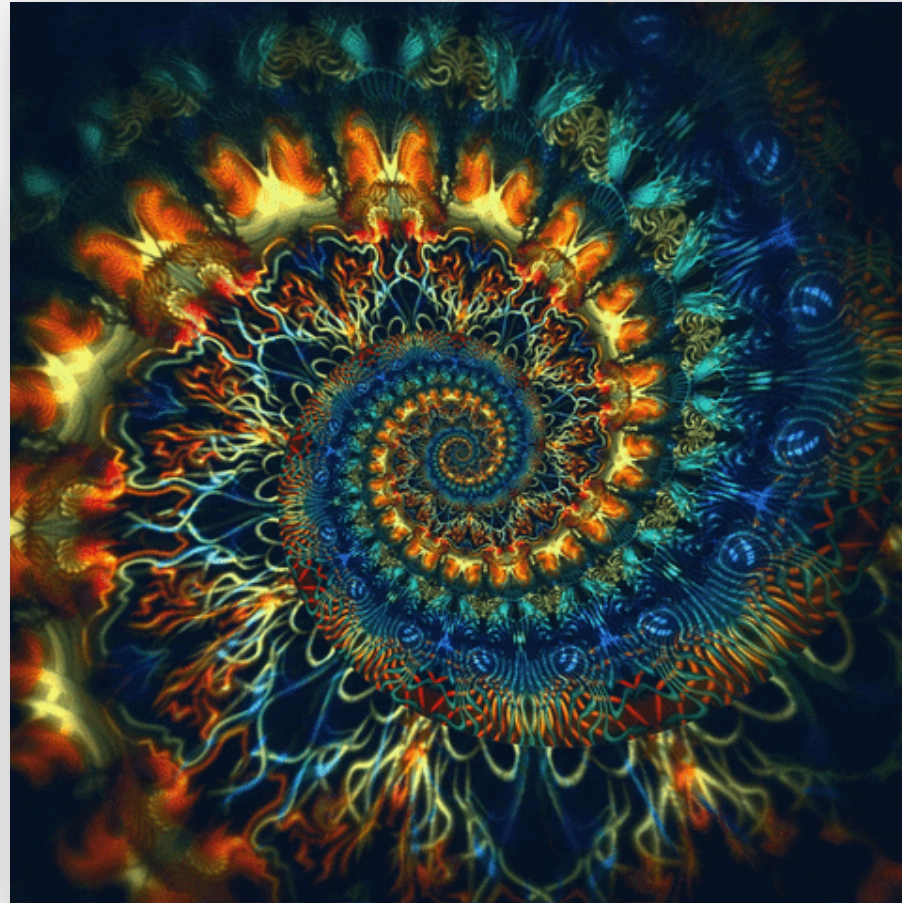
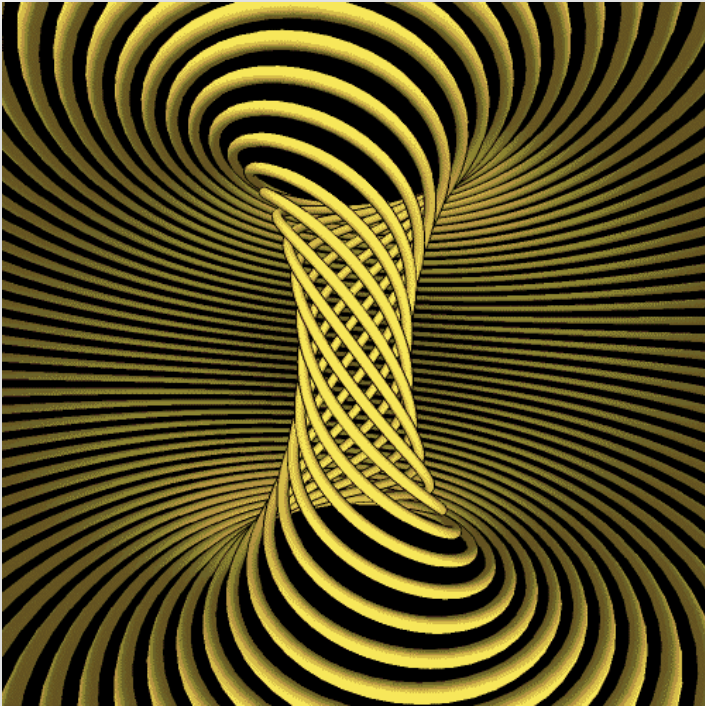
Сила є - розуму не треба



Ідеальний начальник може керувати, не знаючи про стан справ (неявна функція)



**Фрактáл** (лат. *fractus* — подрібнений, дробовий) — нерегулярна, самоподібна структура. У широкому розумінні фрактал означає фігуру, малі частини якої в довільному збільшенні є подібними до неї самої. Термін *фрактал* увів 1975 року Бенуа Мандельборт.

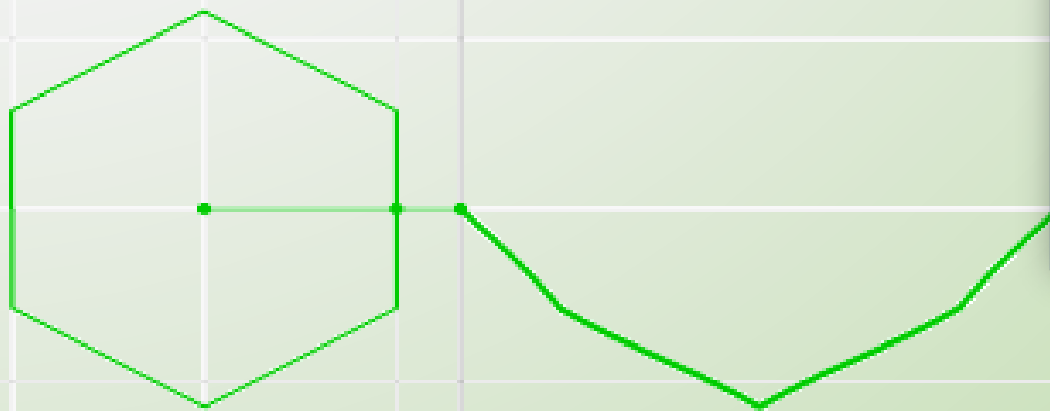


# Висновки



- ✓ розглянуто теоретичні основи застосування властивостей функцій при розв'язуванні рівнянь;
- ✓ доведено, що використання функціонально-графічного методу є раціональним та ефективним (метод було доведено на практиці);
- ✓ розглянуто питання можливостей використання графічної програми **GeoGebra** для побудови графіків функцій;
- ✓ показано деякі приклади нестандартного погляду на застосування графічного методу в навколишньому середовищі.

Ця робота дає змогу поглибити рівень знань з обраної теми, може використовуватись на уроках математики, факультативних заняттях, при підготовці до ЗНО та олімпіад, на уроках біології, географії, хімії. **Таким чином, мета роботи — досягнута.**



Дякую за  
увагу!